数理解析研究所講究録
919巻 1995年 79-85

Jacksonの basic double hypergeometric series $\Upsilon_1(a;b;c;x,y;\lambda)$ およびその多変数化の contiguity relations について

日立製作所　　堀内 恵美 (Emi Horiuchi)

今回対象とするのは次の級数である.

$$F(\alpha;\beta_1;\cdots;\beta_{n-1};\gamma;x_1,\cdots,x_n)=\sum_{\nu_1\cdots\nu_n}\frac{[\alpha:\sum_{i=1}^{n}\nu_i][\beta_1:\nu_1]\cdots[\beta_{n-1}:\nu_{n-1}]}{[\gamma:\sum_{i=1}^{n}\nu_i][1:\nu_1]\cdots[1:\nu_{n-1}][1:\nu_n]}x_1^{\nu_1}\cdots x_n^{\nu_n}q^{\frac{1}{2}\nu_n(\nu_n-1)} \quad \cdots (0.1)$$

但し $[\alpha;\nu]\overset{\mathrm{def}}{=}[\alpha]\cdot[\alpha+1]\cdots[\alpha+\nu-1]$, $[\alpha]\overset{\mathrm{def}}{=}\dfrac{1-q^{\alpha}}{1-q}$ とする.

又, T_i を変数 x_i を q 倍する作用素

$$T_i : f(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto (T_i f)(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,qx_i,\cdots,x_n)$$

とし, q-差分作用素を $[\theta_i]=\dfrac{1-T_i}{1-q}$ で定義する. 更に $[\theta_i+\alpha]=\dfrac{1-q^{\alpha}T_i}{1-q}$ とおく.

(0.1) において $n=5$ の場合, すなわち2変数の場合を考えると

これは Jacksonの basic double hypergeometric series

$$\Upsilon_1(a;b;c;x,y,\lambda)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{[a:m+n][b:m]}{[c:m+n][1:m][1:n]}x^m y^n q^{\lambda n(n-1)}$$

で $\lambda=\frac{1}{2}$ としたものである.

(0.1) の contiguity relations を調べるのが目的である.

1. まず (0.1) に対する昇降演算子を求める.

以下，パラメータ $\alpha, \beta_p (4 \leq p \leq n-1), \gamma$ のかわりに次の関係を満たす μ_i を用いることにする（[3], [4], [5], [6] 参照）.

$$\begin{cases} \alpha = \mu_2 + 1 \\ \gamma = \mu_2 + \mu_3 + 2 \\ \beta_p = -\mu_p \quad (4 \leq p \leq n-1), \quad \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i = -2 \end{cases} \quad \cdots (1.1)$$

(1.1) により α を 1 増やすことと μ_2 を 1 増やして μ_3 を 1 減らすことは同じ意味をもつ．同様に β_i を 1 増やすことは μ_1 を 1 増やして μ_i を 1 減らすことと，γ を 1 減らすことは μ_1 を 1 増やして μ_3 を 1 減らすことと同等である．以下，μ_i を 1 増やして μ_j を 1 減らす作用素を C_{ij} と書く．まず次の作用素は容易に求めることができる．ここでは 1 ずつ上下したパラメータは F の右の上下に書くことにする．

$$C_{23} \quad [\sum_{i=4}^{n} \theta_i + \alpha] F = [\alpha] F^{\alpha}$$

$$C_{1p} \quad -q^{-\beta_p} [\theta_p + \beta_p] F = [-\beta_p] F^{\beta_p} \qquad (4 \leq p \leq n-1)$$

$$C_{13} \quad -q^{1-\gamma} [\sum_{i=4}^{n} \theta_i + \gamma - 1] F = [1-\gamma] F_{\gamma}$$

$$C_{2p} \quad q^{\gamma - \beta_p} x_p^{-1} [\theta_p] F = \frac{[\alpha][-\beta_p]}{[-\gamma]} F^{\alpha \beta_p \gamma} \quad (4 \leq p \leq n-1)$$

$$C_{2n} \quad -q^{\gamma} T_n^{-1} x_n^{-1} [\theta_n] F = \frac{[\alpha]}{[-\gamma]} F^{\alpha \gamma}$$

これらから (0.1) の満たす q-差分方程式を導くことができる．

$$\begin{cases} \left([\sum_{i=4}^{n} \theta_i + \alpha] - T_n^{-1} x_n^{-1} [\theta_n] [\sum_{i=4}^{n} \theta_i + \gamma - 1] \right) F(x_4, \cdots, x_n) = 0 & \cdots (1.2) \\ \left([\sum_{i=4}^{n} \theta_i + \alpha] [\theta_p + \beta_p] - x_p^{-1} [\theta_p] [\sum_{i=4}^{n} \theta_i + \gamma - 1] \right) F(x_4, \cdots, x_n) = 0 & \cdots (1.3) \\ \qquad (4 \leq p \leq n-1) & \end{cases}$$

この方程式を用いて α を 1 減らす作用素を求めてみる．

(1.2) の両辺に左から $x_n T_n$ をかける．

$$\Big(x_n T_n \Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i+\alpha\Big]-[\theta_n]\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i+\gamma-1\Big]\Big)F(x_4,\cdots,x_n)=0$$

ここで $[a+b]$ は $[a]+q^{a}[b]$ 又は $q^{b}[a]+[b]$ と書け，$[\theta_i+A]$ も $[\theta_i]+T_i[A]$ 又は $q^{A}[\theta_i]+T_i$ と書ける．よって $\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i+\gamma-1\Big]=q^{\gamma-\alpha-1}\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i+\alpha\Big]+[\gamma-\alpha-1]$ と書けるから

$$\Big\{\big(x_nT_n-q^{\gamma-\alpha-1}[\theta_n]\big)\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i+\alpha\Big]-[\theta_n][\gamma-\alpha-1]\Big\}F(x_4,\cdots,x_n)=0$$

となる．両辺の左から $T_4\cdots T_{n-1}$ をかけて次式を得る．

$$\Big\{\big(q^{-1}T_4\cdots T_n x_n-q^{\gamma-\alpha-1}T_4\cdots T_{n-1}[\theta_n]\big)\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i+\alpha\Big]-T_4\cdots T_{n-1}[\theta_n][\gamma-\alpha-1]\Big\}F(x_4,\cdots,x_n)=0 \quad \cdots (1.4)$$

(1.3) 式に左から x_p をかけて変形して

$$\Big\{\big(x_p[\theta_p+\beta_p]-q^{\gamma-\alpha-1}[\theta_p]\big)\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i+\alpha\Big]-[\theta_p][\gamma-1]\Big\}F(x_4,\cdots,x_n)=0 \quad (4\leq p\leq n-1) \quad \cdots (1.5)$$

(1.4) と，(1.5) に左から $T_4\cdots T_{p-1}$ をかけて $p=4$ から $p=n-1$ までの和をとったものをたして次を得る．

$$\Big\{\Big(q^{-1}T_4\cdots T_n x_n+\sum_{p=4}^{n-1}T_4\cdots T_{p-1}x_p[\theta_p+\beta_p]-q^{\gamma-\alpha-1}\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i\Big]\Big)\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i+\alpha\Big]-\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i\Big][\gamma-\alpha-1]\Big\}F(x_4,\cdots,x_n)=0$$

$\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i\Big]=\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i+\alpha-\alpha\Big]=q^{-\alpha}\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i+\alpha\Big]-q^{-\alpha}[\alpha]$ を用いて

$$\Big(q^{-1}T_4\cdots T_n x_n+\sum_{p=4}^{n-1}T_4\cdots T_{p-1}x_p[\theta_p+\beta_p]-q^{\gamma-\alpha-1}\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i\Big]-q^{-\alpha}[\gamma-\alpha-1]\Big)\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i+\alpha\Big]F(x_4,\cdots,x_n)$$
$$=-q^{-\alpha}[\gamma-\alpha-1][\alpha]F(x_4,\cdots,x_n) \quad \cdots (1.7)$$

$\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i+\alpha\Big]F(x_4,\cdots,x_n)=[\alpha]F^{\alpha}(x_4,\cdots,x_n)$ であったから (1.7) 式の両辺を $[\alpha]$ でわり，α を 1 減らして目的の作用素を得る．

$$C_{32}\quad \Big(-q^{\alpha-2}T_4\cdots T_n x_n-q^{\alpha-1}\sum_{p=4}^{n-1}T_4\cdots T_{p-1}x_p[\theta_p+\beta_p]+q^{\gamma-1}\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i\Big]+[\gamma-\alpha]\Big)F=[\gamma-\alpha]F_\alpha$$

他の作用素も同様にして，場合によっては (1.2), (1.3) の compatibility

$$\begin{cases}\big(T_n^{-1}x_n^{-1}[\theta_n][\theta_p+\beta_p]-x_p^{-1}[\theta_p]\big)F(x_4,\cdots,x_n)=0\\ \big([\theta_p+\beta_p]x_s^{-1}[\theta_s]-[\theta_s+\beta_s]x_p^{-1}[\theta_p]\big)F(x_4,\cdots,x_n)=0 \quad (4\leq p,s\leq n-1)\end{cases}$$

を用いて求めることができる.

$$C_{3n}\quad \left(q^{2\gamma-\alpha}T_n^{-1}x_n^{-1}[\theta_n]-q^{\gamma}\right)F=\frac{[\gamma-\alpha]}{[-\gamma]}F^{\gamma}$$

$$C_{pn}\quad \left(1-q^{\beta_p-1}x_pT_n^{-1}x_n^{-1}[\theta_n]\right)F=F_{\beta_p}\qquad (4\leq p\leq n-1)$$

$$C_{p2}\quad \Big\{q^{-\gamma}T_p^{-1}x_n+q^{\alpha-\gamma}T_p^{-1}\sum_{s=4}^{n-1}T_4\cdots T_{s-1}x_s[\theta_s+\beta_s]+q^{1-\gamma}T_p^{-1}[\alpha-1]-q^{1-\gamma}T_n^{-1}T_p^{-1}\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i+\gamma-1\Big]\Big\}F$$
$$=[1-\gamma]F_{\alpha\beta_p\gamma}\qquad (4\leq p\leq n-1)$$

$$C_{12}\quad \Big\{q^{\alpha-\gamma-1}T_4\cdots T_nx_n-q^{1-\gamma}\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i+\gamma-1\Big]+q^{\alpha-\gamma}\sum_{s=4}^{n-1}T_4\cdots T_{s-1}x_s[\theta_s+\beta_s]\Big\}F=[1-\gamma]F_{\alpha\gamma}$$

$$C_{3p}\quad \left(q^{\gamma-\beta_p}[\theta_p+\beta_p]-q^{2\gamma-\alpha-\beta_p}x_p^{-1}[\theta_p]\right)F=\frac{[-\beta_p][\gamma-\alpha]}{[-\gamma]}F^{\beta_p\gamma}\qquad (4\leq p\leq n-1)$$

$$C_{p3}\quad \Big(q^{-\gamma}x_pT_p^{-1}\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i+\alpha\Big]-q^{1-\gamma}T_p^{-1}\Big[\sum_{i=4}^{n}\theta_i+\gamma-1\Big]\Big)F=[1-\gamma]F_{\beta_p\gamma}\qquad (4\leq p\leq n-1)$$

$$C_{ps}\quad \left(q^{-\beta_s-1}x_pT_p^{-1}x_s^{-1}[\theta_s]-q^{-\beta_s}[\theta_s+\beta_s]T_p^{-1}\right)F=[-\beta_s]F_{\beta_p}^{\beta_s}\qquad (4\leq p\neq s\leq n-1)$$

2. ここで $q=1$ の場合を考えてみる.

$q=1$ の場合の昇降演算子間の関係(contiguity relations)は以下の通りである.

$$\begin{cases} [C_{1t},C_{tn}]=1 & (2\leq t\leq n-1) \\ [C_{it},C_{tj}]=C_{ij} & i<t<j \text{ かつ } (i,j)\neq(1,n) \\ & \text{又は} \\ & j<t<i \\ [C_{ij},C_{ji}]=\mu_i-\mu_j & \\ \text{その他可換} & \end{cases}$$

但し $[a,b]=ab-ba$.

第3式の右辺は $F(\alpha;\beta_4;\cdots;\beta_{n-1};\gamma;x_4,\cdots,x_n)$ に $(\mu_i-\mu_j)$ をかけるという作用素を表す. この作用素を H_{ij} と書くことにすると、H_{ij} と他の

作用素との交換関係は $[H_{ij}, C_{kl}]=(\delta_{ki}+\delta_{lj}-\delta_{kj}-\delta_{li})C_{kl}$ である.

ここで次の形の $n\times n$ 行列全体の集合 $\mathfrak{g}$ を考える.

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & m_{n-1\,2} & \cdots & m_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \sum_{i=2}^{n-1} m_{ii}=0 \right\}$$

E_{ij} を行列単位とするとき, $\mathfrak{g}$ の基底の $[a,b]=ab-ba$ に対する交換関係は次の通りである.

$$\begin{cases} [E_{it}\ E_{tj}]=E_{ij} & (t\neq i,j \text{ かつ } i\neq j) \\ [E_{i\,i+1}\ E_{i+1\,i}]=E_{ii}-E_{i+1\,i+1} & \\ [E_{ii}-E_{i+1\,i+1}, E_{kl}]=(\delta_{ki}+\delta_{l\,i+1}-\delta_{k\,i+1}-\delta_{li})E_{kl} & \\ \text{その他可換} & \end{cases}$$

この交換関係から $\mathfrak{g}$ は $[a,b]$ に関して閉じており, リー環を構成していることがわかる. 又, $\mathfrak{g}$ の基底のうち, E_{1n} はすべての元と可換, すなわち center である.

又, 特に集合 $I=\{E_{1i}, E_{in}, E_{1n}\ (2\leq i\leq n-1)\}$ を考えると. これらの交換関係は

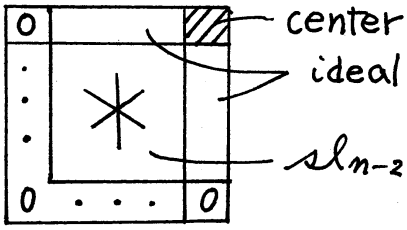
$$\begin{cases} [E_{1k}\ E_{kn}]=E_{1n} & (2\leq i\leq n-1) \\ \text{その他可換} & \end{cases}$$

である. $2(n-1)$ 個の生成元 $\{E_{1i}, E_{in}\}$ と上の関係式で生成される代数を $2(n-1)$ 個の生成元をもつ Heisenberg 代数と呼ぶ.
$\mathfrak{g}$ の交換関係から I は $\mathfrak{g}$ のイデアルを構成していることがわかる.

又, $e_i=E_{i+1\,i+2}$, $f_i=E_{i+2\,i+1}$, $h_i=H_{i+1\,i+1}-H_{i+2\,i+2}$ $(1\leq i\leq n-3)$

とおくとこれらは $\mathfrak{sl}_{n-2}$ の関係式を満たす.

これらのことは視覚的に見ることができる.



C_{ij} と E_{ij} をくらべて $h_i=\mu_i-\mu_{i+1}$ とおけば contiguity relations が $\mathfrak{g}$ の表現を構成していることがわかる.

3. (0.1) についての contiguity relations を計算した結果を述べる.

Theorem (0.1) に対する contiguity relations は次の通りである.

$$\begin{cases} [C_{1k}, C_{kn}]_q = 1 & (2\le k\le 1) \\ [C_{1k}, C_{kj}]_q = C_{ij} & i<k<j \text{ かつ } (i,j)\neq(1,n) \text{ 又は } j<k\le i \\ [C_{ij}\ C_{ji}] = q^{\mu_j}[\mu_i-\mu_j] & \\ \text{その他 } [a,b]=ab-ba \text{ で可換} & \end{cases}$$

但し $[a,b]_q = ab-q\,ba$.

第3式の右辺は F に対して $q^{\mu_j}[\mu_i-\mu_j]$ をかけるという作用素を表す. 又, $q^{H_{ij}}=q^{\mu_i-\mu_j}$ とすると $q^{H_{ij}}$ と C_{kl} との交換関係は $q^{H_{ij}}C_{kl}=q^{(\delta_{ki}+\delta_{l,i+1}-\delta_{k,i+1}-\delta_{li})}C_{kl}\,q^{H_{ij}}$ である.

集合 $I_q=\{C_{1i}, C_{in}, 1, 2\le i\le n-1\}$ を考えるとこれらは次の関係式

を満たす.

$$\begin{cases} [C_{1i}\ C_{in}]_q = 1 & (2 \leq i \leq n) \\ \text{その他可換} \end{cases}$$

I_q は昇降演算子全体のなす代数のイデアルであり. 1はcenterである.

4. 参考文献

[1] E. Horikawa, Contiguity relations for q-hypergeometric function and related quantum group, Proc. Japan Acad. Ser. A68,(1992),157-160.

[2] M. Noumi, Quantum Grassmannians and q-hypergeometric series, CWI Quarterly 5(1992), 293-307.

[3] H. Kimura, Y. Haraoka, and K. Takano, The Generalized Confluent Hypergeometric Functions, Proc, Japan Acad. Ser. A68(1992)290-295.

[4] H. Kimura, Y. Haraoka, and K. Takano, On Confluences of the General Hypergeometric Systems, Proc, Japan Acad. Ser. A69(1993), 99-104.

[5] Y. Haraoka and H. Kimura, Contiguity relations of Generalized Confluent Hypergeometric Systems, Proc, Japan Acad. Ser. A69.(1993), 105-110.

[6] H. Kimura, Y. Haraoka, and K. Takano, On Contiguity relations of the confluent Hypergeometric Systems, Proc, Japan Acad. Ser. A70(1994), 47-49.

[7] F. H. Jackson, Basic Double Hypergeometric Functions (II), THE QUARTERLY JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol XV(1944), 49-.